

DeTtivando

EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

APOCALIPSIS MATEMÁTICO

LAS REVELACIONES
+ DIVERTIDAS Y
+ GRANDIOSAS
DE LAS MATEMÁTICAS

B

Eduardo Sáenz de Cabezón

APOCALIPSIS MATEMÁTICO

PLAN
B

Edición en formato digital: septiembre de 2020

© 2020, Eduardo Sáenz de Cabezón, por los textos
© 2020, Jordi Barenys Haya, por las ilustraciones de interior
© 2020, Penguin Random House Grupo Editorial, S. A. U.
Travessera de Gràcia, 47-49. 08021 Barcelona

Créditos de las imágenes: p. 353, Karl Oppolzer, bajo licencia Creative Commons BY-SA 3.0;
pp. 359 y 367, Canaan, bajo licencia Creative Commons BY-SA 4.0;
p. 373, Bev Sykes, bajo licencia Creative Commons BY-SA 2.0.

Penguin Random House Grupo Editorial apoya la protección del *copyright*.
El *copyright* estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento,
promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Gracias por comprar una edición autorizada
de este libro y por respetar las leyes del *copyright* al no reproducir ni distribuir ninguna parte de esta
obra por ningún medio sin permiso. Al hacerlo está respaldando a los autores
y permitiendo que PRHGE continúe publicando libros para todos los lectores.
Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, <http://www.cedro.org>)
si necesita reproducir algún fragmento de esta obra.

ISBN: 978-84-17809-94-2

Compuesto en M. I. Maquetación, S. L.

Composición digital: Newcomlab S.L.L.

www.megustaleer.com

| Penguin
| Random House
| Grupo Editorial |

1. ¡Temblad! ¡Llega el Apocalipsis!	2
1. El ejército de las tinieblas	19
2. Tronos, dominaciones, potestades	167
☠ Cero	449
3. Pecado	593
5. Los veintitrés jinetes del Apocalipsis	709
☠ Infinito	907
8. Posapocalipsis	1033
Pistas y soluciones	1049



¡TEMBLAD! ¡LLEGA EL **Apocalipsis!**

Si alguna vez me hubieran dicho que iba a titular así la introducción de un libro de matemáticas, no habría



dado crédito, pero en cualquier caso habría vendido sin dudarlo mi alma al diablo para conseguirlo. Y, mira por dónde, aquí estamos en ello y con mi alma todavía a salvo de las garras de Satanás.

El **Apocalipsis** tiene que ser una cosa de lo más chula, aunque seguro que sale carísimo: el fin del mundo, dragones, fuego, ángeles y bestias peleando en el cielo, muerte y destrucción, nubes negras, esqueletos montados en caballos que surcan el firmamento, estrellas que caen y ríos de lava... Como aficionado al *death metal*, no se me ocurre nada mejor para una tarde de palomitas. La verdad es que mola más que el mundo se acabe de esta manera que recalentado por el cambio climático, convertido en un desierto sin osos polares o fulminado por un meteorito sin que el héroe yanqui de turno pueda hacer nada por evitarlo.

El último libro de la Biblia cristiana, el Apocalipsis, se llama también Libro de las Revelaciones porque eso es precisamente lo que significa en griego Ἀποκάλυψις: revelar, quitar el velo, que la realidad muestre su verdadera naturaleza. Por eso me pareció buena idea titular este libro *Apocalipsis Matemático*. Porque, por una parte, hay mucha gente a la que le vienen a la mente ríos de lava, jinetes esqueléticos y el fin del mundo cada vez que recuerda sus clases de matemáticas o simplemente cuando le nombras una raíz cuadrada, una integral doble o alguna de esas cosas que identifica con instrumentos de tortura medievales. Pero, por otro lado, las matemáticas son precisamente la mejor forma que tenemos los humanos de revelar la naturaleza, de quitarle el velo al misterioso azar que parece gobernarlo todo, a esa aparente imprevisibilidad de los acontecimientos naturales. Cuando las matemáticas estuvieron listas, la ciencia —todas las ciencias— produjo los avances que nos han hecho llegar a donde estamos y que siguen sorprendiéndonos cada día al descubrir nuevas facetas de esta maravilla que es el mundo (y que sería una pena que quedase destruido entre mares de fuego y ácido por aquello del Apocalipsis).

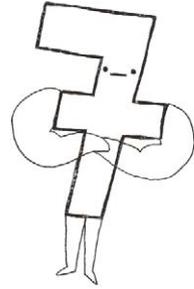
En este libro vamos a hablar de muchas cosas: de movidas matemáticas que no tienen (en principio) nada que ver con nada pero que molan porque sí; sobre las propias matemáticas y su naturaleza (de forma implícita en todos los capítulos, de forma explícita en alguno

de ellos); y también de las aplicaciones de las matemáticas en las ciencias y en la ordenación de nuestra vida. No hay que obsesionarse con nada, que acaba uno fatal de la cabeza, pero si eres de esa gente que piensa que obsesionarse tiene su punto, las matemáticas son una buena alternativa: entiendes cuestiones que a los demás les parecen secretos arcanos, puedes hablar un lenguaje ininteligible, no te las acabas nunca y encima te pueden producir frustración y placer a partes iguales. Yo estoy un pelín obsesionado con las matemáticas, aunque se me pasa enseguida, y por eso tengo un canal de YouTube en el que hablo sobre mates. Se llama *Derivando* y he tratado decenas de temas matemáticos en los vídeos que subo. Esos temas son la base de este libro: aquellas cuestiones que más han interesado en *Derivando*, las que la gente me ha pedido que incluya y algunas que deberían estar en el canal pero no están (todavía). Todos conforman este Apocalipsis que trata de mostrar el espectáculo de la revelación matemática de la naturaleza. Ponte las gafas de dejarte sorprender, pillas algo de comer o de beber, dale al botón de *Apocalypse Now* y adelante con el libro. Pero, antes, unas *recomendaciones de uso*:

Hay muchas formas de utilizar este libro. Una es comprarte un montón de ejemplares, cien o por ahí, armar una pila, escribir en torno a ella un pentagrama con símbolos cabalísticos, prenderle fuego y arder invocando

al demonio para que te revele los secretos de las matemáticas. No te lo recomiendo: tiene que doler un montón, te vas a quedar hecho polvo y el demonio no tiene pinta de saber demasiadas matemáticas, por mucho que firme con «666». Pero bueno, si aun así decides hacerlo, sube fotos a Instagram y etiquétame para verlas.

Otra forma es leerlo como un libro normal, empezando por el primer capítulo y siguiendo adelante con todos, en un orden secuencial perfecto. Yo lo haría así, porque soy un soso y ando un poco obsesionado con el orden y con hacer las cosas como es debido y todas esas limitaciones que mi carácter me impone. Puedes hacerlo así perfectamente, todo tendrá sentido y vivirás una aventura matemática sin riesgos ni alteraciones graves. Tu corazón te lo agradecerá.



O puedes lanzarte a lo loco. Empezar por donde quieras, seguir por donde te dé la gana, dejar capítulos sin terminar y retomarlos después de haber leído otros. Es un libro con muchos niveles y con muchas caras. A lo largo de los capítulos te vas a encontrar advertencias sobre la dificultad de algunas secciones, para que no te adentres en ellas sin casco. ¡Ah! También hay algunos retos y ejercicios... Las dificultades están indicadas con calaveras: una calavera significa que (en principio) la cosa

es sencilla; tres calaveras significa que hay gente que ha muerto intentándolo sin casco. En todo caso, podrás encontrar pistas y soluciones al final, para que no te desesperes. (A esto me ha obligado la editorial; agrádeselo a ellos, yo soy más partidario de provocar desesperación y dolor.)

Este es un libro con un montón de estructuras distintas y en el que las piezas han sido ensambladas de un modo particular, sí, pero podrían haber estado dispuestas de otra forma. Si decides leer el libro a lo loco, te vas a divertir, pero también puede pasar que de repente no entiendas algo y tengas que buscar apoyos en otras partes del libro, porque en algún lugar está la pieza que te falta para comprender. ¿Y qué? *Esto no es una escape room* de esas: puedes salir cuando quieras, volver a entrar y repetir párrafo las veces que te dé la gana. Siéntete libre. A mí me agobia leer los libros en desorden, pero ¿quién dice que el único orden posible es el que yo propongo? No saldrá esa afirmación de mi boca, desde luego.

Unas últimas palabras sobre la numeración de los capítulos y las páginas. El orden habitual de 1, 2, 3, 4, 5... es tan aburrido que corres peligro de quedarte dormido en el tren mientras vas leyendo el libro, así que he decidido usar una numeración, digamos, más «matemática». Estoy absolutamente seguro de que vas a saber de qué va la cosa. Si no, siempre puedes buscar esa secuencia de numerillos en internet y aprender algo sobre ellos...

En este libro vas a encontrar matemáticas. Y las matemáticas son muy variadas. Hallarás cosas sencillas y otras complicadas. Vas a poder darte cuenta de que son un mundo inmenso lleno de cuestiones difíciles (probablemente mucho más de lo que puedas imaginar) pero que no voy a tratar de lleno, tan solo nombraré algunas y podrás investigar por tu cuenta si tienes curiosidad (te lo recomiendo). Encontrarás diversión y curiosidades, así como la encarnizada lucha de los matemáticos por hallar sentido a todo lo que hacen (casi siempre lo consiguen). Verás aplicaciones, matemáticas cotidianas y matemáticas que jamás podrás observar de cerca a no ser que te dediques profesionalmente a ellas. Habrá muchos términos, problemas y conceptos que quizá te llamen la atención y dirijan tu curiosidad hacia otras fuentes: ¡síguela! ¡Adéntrate en el (casi) infinito mundo de las matemáticas! Vuelve al libro cuando quieras, está preparado para darte nuevas sorpresas cada vez que regreses a él.

Antes de comenzar, quiero proponerte un juego. A continuación verás dos cuadros. Escribe en el primero tu propia definición de matemáticas, la que tienes ahora antes de leer el libro. Y cuando acabes, o cuando quieras, vuelve a esta página y rellena el segundo cuadro con la definición de matemáticas que tengas después de pasar por este *Apocalipsis Matemático* y cualesquiera lugares a los que la lectura de este volumen te haya llevado.

Después, compara ambas definiciones y comprueba que nunca tendremos una idea precisa y completa sobre lo que son las matemáticas, que siempre nos queda algo por abarcar, y esa es la maravilla de esta ciencia.

Pero, sobre todo, permítete siempre **DISFRUTAR** de las matemáticas.

Tu definición de matemáticas **ANTES** de leer este libro:

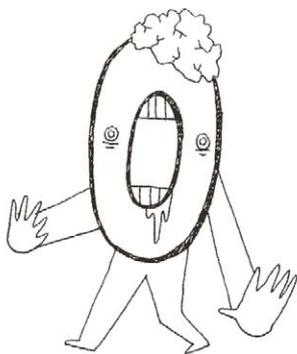
Tu definición de matemáticas **DESPUÉS** de leer este libro:



EL EJÉRCITO DE LAS TINIEBLAS

En el Apocalipsis aparecerá el ejército de los justos que se enfrentará en el Armagedón a las huestes de Satanás formadas por los muertos no arrepentidos, la mala gente zombi.

Una batalla que dejará a la altura del betún a cualquiera de las pelis de superhéroes, guerras interestelares



o madres de dragones que hayas visto jamás. Las batallas con megaejército son de las mejores cosas de cualquier apocalipsis decente. Lo sabe todo director de cine que quiera abarrotar de palomitas las salas de cine de medio mundo. Pues bien, ahora ima-

gínate todos los ejércitos de *El señor de los anillos* juntos, todos los magos de la batalla final de la saga *Harry Potter*, la pasada de superhéroes y villanos de *Endgame* y todas, toditas, todas las naves de todas las batallas de *Star Wars*. Pues todo eso junto no es nada —inada!— comparado con la batalla final del Apocalipsis Mate-

mático. Porque en esa contienda están todos los números, y los números son muchos, pero muchos. Infinitos, que es más que muchos. Si algo va a haber en el Apocalipsis Matemático son números. *Toneladas de números.*

Casi todo el mundo tiene claro que las matemáticas van de números. Y es bastante cierto, a muchos niveles además, pero quizá no como se lo imagina la gente. Muchas personas cuando piensan en números lo hacen en cuentas largas o difíciles, con montones de decimales, numerajos tremendos puestos en columnas o filas que rellenan folios y folios de ejercicios, en las que además no se puede usar calculadora. Cuando le dices a alguien que eres matemático, si no sale corriendo, llorando y agitando los brazos, normalmente se piensa que lo mejor que sabes hacer en la vida son multiplicaciones o divisiones gigantes, la cuenta cuando pagas en un restaurante o raíces cuadradas con lápiz y papel (¿de verdad todavía hay algún ser que se acuerde de cómo hacer una raíz cuadrada «a mano»?).

Muchas personas nos ven como *calculadoras humanas, infalibles y rapidísimas.* Y no. No somos particularmente buenos haciendo cuentas o cálculo mental, no más que cualquiera, al menos yo no. Es cierto que, como muchas veces tenemos contacto con números, hacemos



cuentas de vez en cuando, pero ni de lejos es a lo que nos dedicamos. Eso sí, nos encantan los números, los disfrutamos, jugamos con ellos, los conocemos, nos parecen bonitos, divertidos, nos emocionan, nos interesan, nos apasionan.

Existen muchos tipos de números; de hecho, es difícil definir *número* porque hay varias cosas diferentes a las que llamamos «números». Pero no te preocupes, no voy a entrar en disquisiciones filosóficas sobre qué es un número; no tenemos tiempo, el Armagedón se acerca y nuestro mundo se acaba. En fin, vamos con ello, a disfrutar con números especiales, por el placer de jugar. Por cierto, los números que usaremos son naturales (de los de contar, los de toda la vida, y encima positivos) y en base 10 (si no sabes lo que significa «en base 10», no te preocupes: puedes consultar el recuadro que tienes a continuación).

BASES NUMÉRICAS:

Nosotros usamos números en base 10. ¿Eso qué significa? Pues que tenemos *diez* símbolos para construir nuestros números (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y que, al escribir un número, las distintas posiciones expresan el número de veces que estamos añadiendo las distintas potencias de *diez*.

Vamos con un ejemplito. Si tengo el número 2034, ¿qué cantidad estoy expresando en base 10? Pues mira, cuento las posiciones de derecha a izquierda: la primera es la posición cero, a su izquierda la uno, etc., y cada una expresa cuántas veces sumo la correspondiente potencia de diez. La posición cero indica cuántas veces sumo 10^0 que es 1. Lo sumo 4 veces. OK. La siguiente posición, la uno, me indica cuántas veces sumo 10^1 , o sea, 10. Lo sumo 3 veces. La posición dos, que en este caso tiene un 0, indica que sumo 0 veces la cantidad 10^2 , es decir, 100. Y, por último, la posición 3 me indica que en este caso estoy añadiendo dos veces el 1000, que es 10^3 . Así que en base 10 el número 2034 expresa la cantidad dos mil treinta y cuatro.

Si donde hemos usado 10 usamos ahora 5, pues pasaremos de contar en base 10 a hacerlo en base 5, y podemos hacerlo con cualquier base. Ahora tenemos cinco símbolos: 0, 1, 2, 3 y 4. La cifra de posición cero indica las veces que añadimos 5^0 , que es 1. La de posición 1 indica las veces que añadimos 5^1 , que es 5. La de la posición dos indica las veces que añadimos 5^2 , o sea 25, y finalmente la cifra en posición tres indica las veces que añadimos 125, o sea 5^3 . Y en total nos sale (haz la suma sin calculadora) que el número 2034

en base 5 expresa la cantidad doscientos sesenta y nueve.

Puedes intentarlo en otras bases. Como ves, tendrán que ser bases mayores o iguales que 5, ya que cada base comienza sus símbolos con el 0, 1, etc. La base más pequeña es la base 2, llamada «binaria», es decir, que solo usa dos símbolos, el 1 y el 0. Esta base es muy conocida porque la emplean los ordenadores y porque nos permite decir tonterías como que solo hay 10 tipos de personas, las que saben binario y las que no. Y de estas tontadas nos reímos entre nosotros los frikis. Así nos va.

Los números primos

A muchos matemáticos se les pone la cara tontita cuando les hablas de números primos. Les encantan: que si el año nuevo es primo o no, que si qué guay que tienes un número primo de años, ¡vives en un portal que es un número primo! Me parece una horterada ser un *fanboy* o *fangirl* de los números primos, pero, vaya, cada cual tiene sus gustos y además a mí me encantan los números primos. Pero ¿qué tienen de especial? ¿A qué viene tanta historia con los números primos?

Como ya sabrás, tiene que ver con los divisores de un número. Existe una cosa llamada «teorema fundamental de la aritmética» que dice que todo número natural se puede descomponer de forma única como producto de números primos. Los números primos pueden estar repetidos y lo de «de forma única» quiere decir «salvo el orden», claro. De esta manera, el 12 es $2 \cdot 2 \cdot 3$, el 767 es $13 \cdot 59$ y así todos. Por eso los primos son tan importantes, porque son las piezas de las que están hechos (multiplicativamente) todos los números, y saber más sobre los números primos significa saber más sobre todos los números.

Esos factores primos se llaman también «divisores primos del número». Cualquier número puede tener además otros divisores no primos. Por ejemplo, los divisores primos del 12 son 2 y 3, pero el conjunto de todos los divisores del 12 es $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Es decir, el 12 tiene seis divisores en total. Otra cosa: los «divisores propios» de un número son todos sus divisores (primos o no) menos él mismo. O sea, los divisores propios del 12 son 1, 2, 3, 4 y 6.

Por cierto, ¡no he dicho aún qué es un número primo! Un número primo es el que tiene *exactamente* dos divisores. Por ejemplo, el 11, que solo tiene como divisores al 1 y al 11. Date cuenta de que esta definición deja fuera del conjunto de números primos al 1: el número 1 no es primo. El 1 solo tiene un divisor, él mismo, así que