Prefacio

Tengo un amigo que, a pesar de ser artista, disfruta mucho de la ciencia. Cada vez que nos reunimos, lo único que quiere hacer es charlar acerca de lo último en psicología o en mecánica cuántica. Pero en lo que respecta a las matemáticas se siente perdido, y eso le entristece. Los extraños símbolos le ahuyentan. Dice no saber siquiera pronunciarlos.

De hecho, su alienación es más profunda. No tiene claro qué hace un matemático durante todo el día, o a qué se refieren cuando afirman que determinada demostración es elegante. A veces bromeamos con que debería sentarme con él y enseñárselo todo, empezando con 1 + 1 = 2 hasta llegar lo más lejos posible.

Por alocado que parezca, eso es lo que intentaré hacer en este libro. Se trata de un viaje guiado por los elementos de la matemática, desde preescolar hasta la universidad, pensado para cualquiera que desee tener una segunda oportunidad con la materia, esta vez desde una perspectiva adulta. No pretende ser una clase de recuperación. El objetivo es dar una mejor idea de las matemáticas y de por qué resultan tan apasionantes para aquellos que las captan.

Descubriremos cómo los mates de Michael Jordan pueden explicar los fundamentos del cálculo. Les mostraré una manera simple —y alucinante— de entender ese pilar de la geometría: el teorema de Pitágoras. Trataremos de llegar al fondo de algunos de los misterios de la vida, grandes y pequeños: ¿Mató O. J. Simpson a su mujer? ¿Cómo debe voltear el colchón para aprovecharlo al máximo? ¿Con cuántas personas debe salir antes de sentar la cabeza? Y veremos también por qué algunos infinitos son mayores que otros.

Las matemáticas están en todas partes, si sabe dónde mirar. Detectaremos curvas sinusoidales en las rayas de las cebras, escucharemos ecos de Euclides en la Declaración de Independencia de Estados Unidos y reconoceremos señales de números negativos en vísperas de la Primera Guerra Mundial. Y veremos cómo nuestras vidas hoy son tocadas por nuevos tipos de matemática, mientras buscamos restaurantes online y tratamos de entender —por no decir sobrevivir a— los temibles vaivenes de la bolsa.

Por una casualidad que parece encajar solo en un libro sobre números, este nació el día que cumplí cincuenta años. David Shipley, responsable entonces de la sección de Opinión de *The New York Times*, me había invitado a comer en el gran día (inconsciente de su significado semicentenario) para preguntarme si estaría dispuesto a escribir una serie de artículos sobre matemáticas para sus lectores. Me fascinó la idea de compartir los placeres de la matemática con un público que fuera más allá de mi inquisitivo amigo el artista.

«Los elementos de las matemáticas» apareció online a finales de enero de 2010 y duró quince semanas. En respuesta, llovieron cartas y comentarios por parte de lectores de todas las edades. Muchos de los que escribieron eran alumnos y profesores. Otros eran gente curiosa que, por alguna razón, habían descarrilado en algún momento de su educación matemática, pero sentían que se estaban perdiendo algo que merecía la pena y querían intentarlo de nuevo. Fueron especialmente gratificantes los comentarios que recibí por parte de padres agradeciéndome que les hubiera ayudado a explicar matemáticas a sus hijos y, en el proceso, a ellos mismos. Incluso mis colegas y compañeros aficionados a las matemáticas parecían disfrutar las entregas, cuando no sugerían mejoras (o, quizá, especialmente cuando lo hacían).

En términos generales, la experiencia me convenció de que existe un hambre de matemáticas, profunda pero poco reconocida, entre el público general. A pesar de todo lo que oímos acerca de la fobia a las matemáticas, mucha gente *quiere* entender la materia algo mejor. Y una vez que lo logra, la encuentran adictiva.

El placer de la x es una introducción a los conceptos más persuasivos y profundos de las matemáticas. Los capítulos —algunos de la serie original de *The New York Times*— son pequeños bocados independientes, así que siéntase libre de picar allá donde quiera. Si desea ahondar más en cualquier apartado, las notas al final del libro proporcionan detalles adicionales y sugerencias bibliográficas.

Para beneficio de los lectores que prefieren un acercamiento paso a paso, he organizado el material en seis partes principales, siguiendo las líneas del plan de estudios tradicional.

La primera parte, «Números», comienza nuestro viaje con aritmética de preescolar y primaria, destacando lo útiles que pueden ser los números y lo asombrosamente efectivos que resultan para describir el mundo.

La segunda parte, «Relaciones», amplía el trabajar con números a trabajar con *relaciones* entre números. Estas son las ideas que laten en el corazón del álgebra. Lo que las hace tan cruciales es que ofrecen las primeras herramientas para describir cómo una cosa afecta a otra, a través de los principios de causa y efecto, oferta y demanda, dosis y respuesta, etcétera.

En otras palabras, los tipos de relación que hacen el mundo complejo y rico.

La tercera parte, «Formas», cambia de números y símbolos a formas y espacio —el reino de la geometría y la trigonometría—. Además de caracterizar visualmente las cosas, estas materias elevan la matemática a nuevos niveles de rigor a través de la lógica y la demostración.

En la cuarta parte, «Cambio», llegamos al cálculo, la rama más penetrante y fructífera de las matemáticas. El cálculo hizo posible predecir el movimiento de los planetas, el ritmo de las mareas y, prácticamente, toda forma de cambio continuo en el universo y en nosotros mismos. Aprovechando el inmenso poder del infinito, el cálculo finalmente pudo resolver problemas de larga data que habían desafiado a los antiguos y condujo a la revolución científica y al mundo moderno.

La quinta parte, «Datos», se ocupa de la probabilidad, estadística, redes y minería de datos. Todas ellas materias relativamente jóvenes inspiradas en el lado desordenado de la vida: azar, suerte, incertidumbre, riesgo, volatilidad, aleatoriedad, interconexión. Con la matemática correcta, y los datos correctos, veremos cómo extraer significado del remolino.

Acercándonos al final del viaje, en la sexta parte, «Fronteras», nos aproximamos al filo del conocimiento matemático, la frontera entre lo que se conoce y lo que permanece esquivo. La secuencia de capítulos sigue la estructura familiar que hemos empleado —números, relaciones, formas, cambio e infinito—, pero cada tema se revisita en mayor profundidad y fiel a su encarnación moderna.

Espero que todas las ideas que vienen procuren alegría y un buen número de «¡Ajás!». Pero cualquier viaje necesita comenzar por el principio, así que empecemos con el simple y mágico acto de contar.

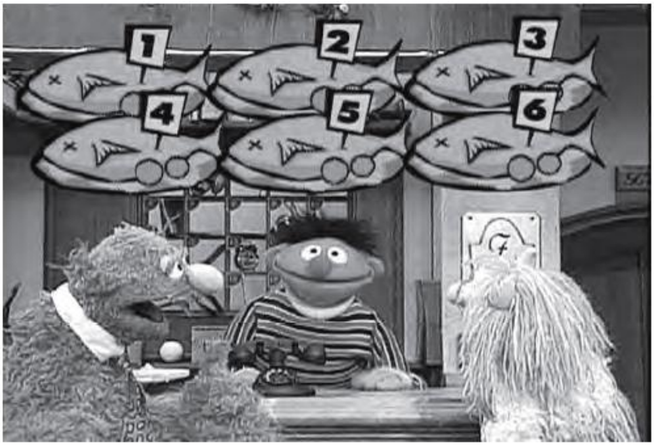
Primera parte

Números

1

EMPEZAR CONTANDO PECES Y LLEGAR AL INFINITO

La mejor introducción a los números que he visto —la explicación más clarividente y graciosa de lo que son y de por qué los necesitamos— aparece en un vídeo de *Barrio Sésamo* llamado *1, 2, 3 cuenta conmigo*[1]. Humphrey, un tipo afable pero algo mentecato, de pelaje rosa y nariz verde, está trabajando en el turno de comidas del hotel de los Brazos Peludos, cuando atiende la llamada de una habitación llena de pingüinos. Humphrey escucha con atención y grita sus pedidos a la cocina: «Pez, Pez, Pez, Pez, Pez, Pez». Esto lleva a Epi a ilustrarle acerca de las virtudes del número seis.



Los niños aprenden así que los números son fantásticos atajos. En lugar de decir la palabra «pez» tantas veces como pingüinos haya, Humphrey podría utilizar el concepto superior que representa «seis».

Como adultos, sin embargo, podemos advertir una desventaja potencial. Claro que los números nos ahorran tiempo, pero a costa de un alto precio en términos de abstracción. Seis es más etéreo que seis peces, precisamente porque es más general. Sirve para seis unidades de cualquier cosa: seis platos, seis pingüinos, seis expresiones de la palabra «pez». Todos tienen en común la inefabilidad.

Desde esta perspectiva, los números empiezan a resultar un poco misteriosos. Parecen pertenecer a alguna clase de reino platónico, a un nivel por encima de la realidad. En ese sentido, se parecen más a conceptos elevados, como los de verdad o justicia, y menos a los objetos cotidianos. Su estatus filosófico se vuelve incluso más oscuro en una reflexión más profunda. ¿De dónde vienen exactamente los números? ¿La humanidad los inventó o los descubrió?

Una sutileza adicional es que los números (de hecho, todas las ideas matemáticas) tienen vida propia[2]. No podemos controlarlos. Aunque existen en nuestras cabezas, una vez decidimos qué expresamos mediante ellos, no podemos intervenir en cómo se comportan. Obedecen a ciertas reglas y poseen ciertas propiedades, personalidades y maneras de combinarse unos con otros, y no hay nada que podamos hacer, salvo observar y tratar de comprender. En ese sentido, son extrañamente evocadores de los átomos y las estrellas, cosas de este mundo también sujetas a leyes que trascienden nuestro control, con la salvedad de que esas cosas existen fuera de nuestras cabezas.

Este aspecto dual de los números —parte Cielo, parte Tierra— es tal vez su rasgo más paradójico y el rasgo que los hace tan útiles. Es lo que el médico Eugene Wigner tenía en mente cuando escribió acerca de «la efectividad irracional de las matemáticas en las ciencias naturales»[3].

Por si no ha quedado claro a qué me refiero al hablar de los números y de su incontrolable comportamiento, volvamos al hotel de los Brazos Peludos. Supongamos que antes de que Humphrey haga el pedido de los pingüinos, recibe repentinamente una llamada de una habitación ocupada por el mismo número de pingüinos, todos ellos también exigiendo pescado. Tras atender ambas llamadas, ¿qué debería gritar Humphrey a cocina? Si no ha aprendido nada, debería gritar «pez» una vez por cada pingüino. Si usara los números, pediría seis raciones de pescado para la primera habitación y seis más para la segunda. Pero lo que realmente necesita es un nuevo concepto: la suma. Una vez que lo domine, dirá orgulloso que necesita seis más seis (o, si quiere presumir, doce) peces.

El proceso creativo aquí es el mismo que nos aportó los números. Al igual que los números son atajos para contar de uno en uno, la suma es un atajo para contar cualquier cantidad. Así crece la matemática. La abstracción correcta lleva a una nueva visión y a un nuevo poder.

En poco tiempo, hasta Humphrey se dará cuenta de que puede seguir contando para siempre.

Sin embargo, a pesar de este panorama infinito, siempre hay límites a nuestra creatividad. Podemos decidir qué queremos decir con cosas como «6» y «+», pero una vez lo hagamos, expresiones como 6 + 6 quedarán fuera de nuestro control. La lógica no nos da elección. En ese sentido, las matemáticas siempre implican invención *y* descubrimiento: inventamos los conceptos pero descubrimos sus consecuencias. Como veremos en los capítulos venideros, nuestra libertad, dentro de las matemáticas, radica en las preguntas que hacemos —y en cómo las acechamos—, pero no en las respuestas que nos deparan.

2

Menos da una piedra

Como todo lo demás, la aritmética tiene su lado serio y su lado lúdico.

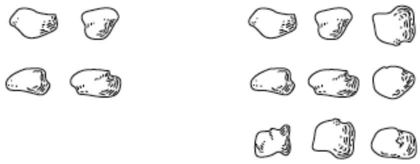
El lado serio es lo que todos aprendimos en el colegio: cómo trabajar con columnas de números, sumando, restando, estrujándolos en las hojas de cálculo para la declaración de la renta y los informes anuales. Este lado de la aritmética es importante, práctico y —para muchas personas— carente de toda gracia.

El lado lúdico de la aritmética[1] es mucho menos familiar, salvo que se tenga formación en matemática avanzada, aunque no hay nada inherentemente avanzado en él. Es tan natural como la curiosidad de un niño[2].

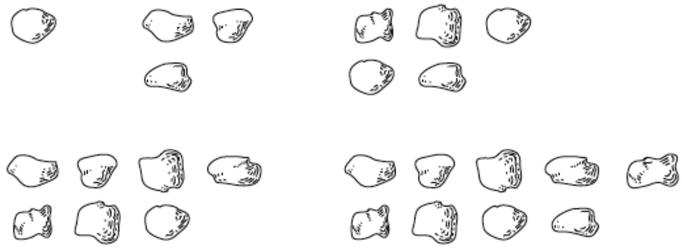
En su libro *A Mathematician's Lament* [El lamento de un matemático], Paul Lockhart aboga por un enfoque educativo en el que los números son tratados de manera más concreta de lo normal: nos pide que los imaginemos como grupos de piedras. Por ejemplo, el 6 corresponde a un grupo de piedras como este:

Es probable que no vea aquí nada llamativo, y eso está bien: salvo que exijamos más a los números, todos parecen prácticamente iguales. Nuestra ocasión de ser creativos viene en lo que exigimos a los números.

Por ejemplo, centrémonos en grupos que tienen entre 1 y 10 piedras y preguntémonos cuáles pueden reorganizarse en patrones cuadrados. Solo dos de ellos pueden: el grupo de 4 y el grupo de 9. Y esto es porque 4 = 2 × 2 y 9 = 3 × 3; obtenemos estos números elevando al cuadrado otros números (de hecho, haciendo una forma cuadrada).



Un reto menos severo es identificar grupos de piedras que puedan organizarse en rectángulo, exactamente con dos filas que salgan a la par. Esto es posible mientras que haya 2, 4, 6, 8 o 10 piedras; el número tiene que ser par. Si intentamos forzar cualquiera de los otros números del 1 al 10 —los impares— a formar en dos filas, siempre sobresaldrá una pequeña parte.



Aun así, no todo está perdido para estos números inadaptados. Si sumamos dos de ellos, sus protuberancias encajan y la suma sale par; impar + impar = par.

Si aflojamos las normas hasta admitir números mayores a 10 y permitimos patrones rectangulares con más de dos filas de piedras, algunos números impares muestran su talento para hacer estos rectángulos más grandes. Por ejemplo, el número 15 puede formar un rectángulo 3 × 5:

Por lo tanto, el 15, aunque indudablemente impar, al menos tiene el consuelo de ser un número compuesto —se compone de tres filas de cinco piedras cada una—. Del mismo modo, cualquier entrada alterna en la tabla de multiplicar produce su propio grupo rectangular.

Pero lo de algunos números, como el 2, 3, 5 y 7, no tiene remedio. Ninguno de ellos puede formar rectángulo alguno, más allá de una simple fila de piedras (una fila única). Estos números, extrañamente inflexibles, son los famosos números primos.

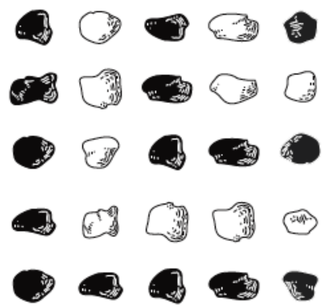
Vemos, pues, que los números tienen peculiaridades estructurales que les dotan de personalidad. Pero para ver el pleno alcance de su comportamiento, necesitamos ir más allá de los números individuales y observar qué les sucede cuando interactúan.

Por ejemplo, en lugar de sumar solo dos números impares, supongamos que sumamos todos los números impares consecutivos, empezando por el uno:

$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Estas sumas, extraordinariamente, siempre resultan en cuadrados perfectos. (Vimos el 4 y el 9 en los patrones cuadrados anteriores, y $16 = 4 \times 4$, y $25 = 5 \times 5$). Una demostración rápida muestra que esta norma se mantiene en números impares más y más grandes; aparentemente se sostiene hasta el infinito. Pero ¿qué conexión puede haber entre los números impares, con sus apéndices desgarbados, y los números tradicionalmente simétricos que forman cuadrados? Colocando las piedras de manera adecuada, podemos hacer que esta relación parezca obvia: el sello distintivo de una demostración elegante[3].

La clave es reconocer que los números impares pueden hacer formas de L, dejando las protuberancias en una esquina. Y al unir sucesivamente formas de L, se obtiene un cuadrado.



Este tipo de ideas aparece en otro libro reciente, aunque por razones literarias totalmente distintas. En la encantadora novela de Yoko Ogawa *La fórmula preferida del profesor,* una inculta pero astuta joven con un hijo de diez años es contratada para ocuparse de un anciano matemático que ha sufrido una traumática lesión cerebral. La lesión le limita la memoria a corto plazo a ocho minutos. A la deriva en el presente y solo en su destartalada casa de campo, sin más compañía que sus números, el profesor trata de conectar con la criada de la única manera que sabe: preguntando su talla de calzado o cumpleaños y teniendo una charla matemática en torno a su estadística. El profesor también tiene especial simpatía por el hijo de la criada, al que llama «Raíz», puesto que la parte superior de su cabeza es plana y le recuerda al símbolo de la raíz cuadrada ($\sqrt{}$).

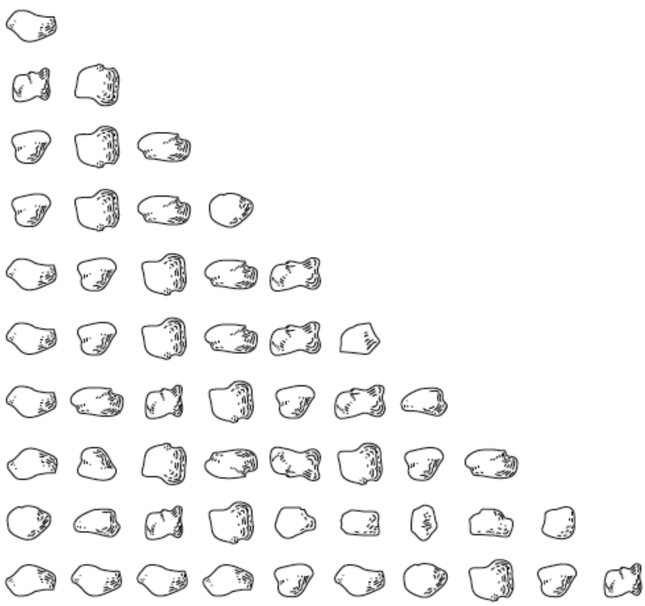
Un día el profesor propone a Raíz un pequeño acertijo: le pide que encuentre la suma de todos los números de 1 a 10. Después de que Raíz haya sumado con atención los números, vuelve con la respuesta: 55, pero el profesor le pide que encuentre una manera mejor. ¿Podría dar con la respuesta *sin* sumar los números? Raíz patea la silla y grita: «¡Eso no es justo!».

Poco a poco, la criada se ve atraída hacia el mundo de los números, y en secreto comienza a estudiar el acertijo. «No estoy segura de por qué me absorbió tanto un problema matemático infantil, sin ninguna utilidad», dice. «En un principio, era consciente de querer agradar al profesor, pero gradualmente ese sentimiento se desvaneció y reparé en que se había convertido en una batalla entre el problema y yo. Cuando me levantaba por la mañana, la ecuación me estaba esperando:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55$$

y me seguía durante el día, como si se me hubiera grabado en la retina y fuera imposible ignorarla».

Hay varias maneras de resolver el problema del profesor (a ver cuántas puede encontrar usted). El propio profesor arguye en torno a lo que hemos desarrollado anteriormente. Interpreta la suma de 1 a 10 como un triángulo de piedras, con 1 piedra en la primera fila, 2 en la segunda, y así hasta 10 piedras en la décima fila:



Por su propia apariencia, este dibujo da un claro sentido de espacio negativo. Parece estar a medio completar. Y eso sugiere un salto creativo. Si copiamos el triángulo, le damos la vuelta y lo sumamos como la parte faltante, obtenemos algo mucho más simple: un rectángulo con 10 filas de 11 piedras cada uno y un total de 110.

Puesto que el triángulo original es la mitad de este rectángulo, la suma deseada debe ser la mitad de 110, o sea, 55.

Observar los números como grupos de piedras puede parecer inusual, pero en realidad es algo tan viejo como la matemática misma. La palabra «calcular» refleja ese legado, viene de la palabra latina *calculus,* que se refiere a un guijarro empleado para contar. Para disfrutar el trabajo con números no hace falta ser Einstein (en alemán: «una piedra»), pero puede resultarle útil tener alguna piedra en la cabeza.